

所以直线 BM 的方程为 $y = \frac{1}{2}x + 1$ 或 $y = -\frac{1}{2}x - 1$.

(2) 直线 BM 、 BN 的斜率之和 $k_{BM} + k_{BN} = 0$, 为定值.

由于直线 l 的斜率可能不存在但不会为 0, 则可设直线 l : $x = my + 2 (m \in \mathbb{R})$, $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$, 则 $x_1 > 0, x_2 > 0$,

由 $\begin{cases} x = my + 2, \\ y^2 = 2x, \end{cases}$ 得 $y^2 - 2my - 4 = 0$, 可知 $y_1 + y_2 = 2m$, $y_1 y_2 = -4$.

直线 BM 、 BN 的斜率之和为:

$$k_{BM} + k_{BN} = \frac{y_1}{x_1 + 2} + \frac{y_2}{x_2 + 2} = \frac{x_2 y_1 + x_1 y_2 + 2(y_1 + y_2)}{(x_1 + 2)(x_2 + 2)} \dots \dots \textcircled{1}$$

将 $x_1 = my_1 + 2, x_2 = my_2 + 2$ 及 $y_1 + y_2, y_1 y_2$ 的表达式代入 $\textcircled{1}$ 式分子, 可得:

$$x_2 y_1 + x_1 y_2 + 2(y_1 + y_2) = 2my_1 y_2 + 4(y_1 + y_2) = -8m + 8m = 0,$$

所以 $k_{BM} + k_{BN} = 0$.

点评总结: 根据高考真题以及变式 1, 可得一般性的结论:

【定理 1】已知点 $M(m, 0)$, $N(-m, 0) (m \neq 0)$ 与抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$, 过点 M 作与 x 轴不平行的直线 l 交抛物线 C 于 A, B 两点, 则直线 AN 、 BM 与 x 轴成等角.

变式方向 2: 改变圆锥曲线类型及其相关条件, 难度相当.

【变式 2】(2018·全国 I 理·19) 设椭圆 $C: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 的右焦点为 F , 过 F 的直线 l 与 C 交于 A, B 两点, 点 M 的坐标为 $(2, 0)$.

(1) 当 l 与 x 轴垂直时, 求直线 AM 的方程;

(2) 设 O 为坐标原点, 证明: $\angle OMA = \angle OMB$.

解析: (1) 由已知得 $F(1, 0)$, l 的方程为 $x = 1$,

由已知可得, 点 A 的坐标为 $(1, \frac{\sqrt{2}}{2})$ 或 $(1, -\frac{\sqrt{2}}{2})$,

所以 AM 的方程为 $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \sqrt{2}$ 或 $y = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \sqrt{2}$.

(2) 当 l 与 x 轴重合时, $\angle OMA = \angle OMB = 0^\circ$;

当 l 与 x 轴不重合时, 设 l 的方程为 $x = my + 1 (m \in \mathbb{R})$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 则 $x_1 < \sqrt{2}, x_2 < \sqrt{2}$, 直线 MA, MB 的斜率之和为 $k_{MA} + k_{MB} = \frac{y_1}{x_1 - 2} + \frac{y_2}{x_2 - 2}$.

由 $x_1 = my_1 + 1, x_2 = my_2 + 1$ 得 $k_{MA} + k_{MB} = \frac{2my_1 y_2 - (y_1 + y_2)}{(my_1 - 1)(my_2 - 1)}$,

将 $x = my + 1$ 代入 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 得 $(m^2 + 2)y^2 + 2my - 1 = 0$,

所以 $y_1 + y_2 = -\frac{2m}{m^2 + 2}, y_1 y_2 = -\frac{1}{m^2 + 2}$,

则 $2my_1 y_2 - (y_1 + y_2) = \frac{-2m + 2m}{m^2 + 2} = 0$,

从而 $k_{MA} + k_{MB} = 0$, 故 MA, MB 的倾斜角互补, 所以 $\angle OMA = \angle OMB$.

综上, $\angle OMA = \angle OMB$.

点评总结: 根据变式 2, 可得一般性的结论:

【定理 2】已知点 $M(m, 0)$, $N(n, 0) (mn = a^2)$ 与椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, 过点 M 作与坐标轴不平行的直线 l 交椭圆 C 于 A, B 两点, 则直线 AN 、 BM 与 x 轴成等角.

变式方向 3: 改变圆锥曲线类型及其相关条件, 难度相当.

【变式 3】设双曲线 $C: \frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{3} = 1$ 的右焦点为 F , 过 F 的直线 l 与 C 交于 A, B 两点, 点 M 的坐标为 $(2, 0)$.

(1) 当 l 与 x 轴垂直时, 求直线 AM 的方程;

(2) 设 O 为坐标原点, 证明: $\angle OMA = \angle OMB$.

解析: (1) 由已知得 $F(3, 0)$, l 的方程为 $x = 3$,

由已知可得, 点 A 的坐标为 $(3, \frac{\sqrt{6}}{2})$ 或 $(3, -\frac{\sqrt{6}}{2})$,

所以 AM 的方程为 $y = -\frac{\sqrt{6}}{2}x + \sqrt{6}$ 或 $y = \frac{\sqrt{6}}{2}x - \sqrt{6}$.

(2) 当 l 与 x 轴重合时, $\angle OMA = \angle OMB = 0^\circ$.

当 l 与 x 轴不重合时, 设 l 的方程为 $x = my + 3 (m \in \mathbb{R})$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 直线 MA, MB 的斜率之和为 $k_{MA} + k_{MB} = \frac{y_1}{x_1 - 2} + \frac{y_2}{x_2 - 2}$.

由 $x_1 = my_1 + 3, x_2 = my_2 + 3$ 得 $k_{MA} + k_{MB} = \frac{2my_1 y_2 + (y_1 + y_2)}{(my_1 + 1)(my_2 + 1)}$,

将 $x = my + 3$ 代入 $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{3} = 1$ 得 $(m^2 - 2)y^2 + 6my + 3 = 0$,

所以 $y_1 + y_2 = -\frac{6m}{m^2 - 2}, y_1 y_2 = \frac{3}{m^2 - 2}$,

则 $2my_1 y_2 + (y_1 + y_2) = \frac{6m - 6m}{m^2 - 2} = 0$,

从而 $k_{MA} + k_{MB} = 0$, 故 MA, MB 的倾斜角互补, 所以 $\angle OMA = \angle OMB$.

综上, $\angle OMA = \angle OMB$.

点评总结: 根据变式 3, 可得一般性的结论:

【定理 3】已知点 $M(m, 0)$, $N(n, 0) (mn = a^2)$ 与双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$, 过点 M 作与坐标轴不平行的直线 l 交双曲线 C 于 A, B 两点, 则直线 AN 、 BM 与 x 轴成等角.

罗增儒教授说过: “一旦获解, 就立即产生感情上的满足, 从而导致心理封闭, 忽视解题后的再思考, 恰好错过了提高的机会, 无异于入宝山而空返.” 通过一题多解, 一题多变等实践, 没有停留在原有的解出题目的基础上, 而是解题后进行了变式探究. 通过一题多变, 培养转向机智及思维的应变性, 实现提高发散思维的变通性. 把课本练习题、考题等通过变换条件, 变换结论, 变换命题等, 使之变为更有价值, 有新意的新问题, 从而应用更多的知识来解决问题, 获得“一题多练” “一题多得” 的效果.

责任编辑 徐国坚